Une nouvelle méthode constructive des lois de comportement des matériaux composites à l'aide de la théorie des invariants

Alain Thionnet, C. Martin

Une nouvelle méthode constructive des lois de comportement des matériaux composites à l'aide de la Théorie des Invariants

A.Thionnet[1,3], *C.Martin*[1,2]
(1) - Université de Bourgogne, Mirande, BP 47870, 21078 Dijon, France
(2) - Institut de Mathématiques de Bourgogne - UMR CNRS 5584
(3) - Centre des Matériaux Mines Paris, Paristech, CNRS UMR 7633, BP 87, 91003 Evry cedex, France

RESUME - On propose une nouvelle méthode constructive, systématique et générale des lois de comportement des milieux anisotropes appuyée sur la Théorie des Invariants. On peut résumer la démarche adoptée de la manière suivante :
- l'ensemble V des variables et le groupe (fini) S des symétries matérielles étant supposés connus, on donne une borne au nombre des éléments d'une famille des générateurs possibles des invariants polynômiaux de V sous S ;
- on donne la méthode pour construire ces éléments ;
- on écrit sous une forme induisant une certaine unicité, dite forme normale, la décomposition de tout invariant polynômial de V sous S.

Enfin, à l'aide des critères de tensorialité, on a accès ainsi à l'écriture générale d'une forme polynômiale pour les fonctions d'état et les potentiels (ou pseudo-potentiels) de dissipation, dont on déduit lois d'état et lois complémentaires.

MOTS CLES - Matériau anisotrope, Loi de comportement, Théorie des Invariants.

1 Introduction

Une démarche logique nécessaire à la construction de l'ensemble des lois de comportement du milieu peut s'établir en trois étapes. La première est une analyse expérimentale visant essentiellement à procéder à l'analyse des phénomènes qui peuvent exister au sein du VER choisi. La seconde étape est d'ordre théorique. Les phénomènes à prendre en compte étant désignés, elle doit notamment :
- d'abord statuer sur la grandeur mathématique la plus adéquate qui va modéliser chacun d'eux ;
- ensuite, écrire explicitement l'ensemble des relations fonctionnelles formant la loi de comportement en vérifiant :
  - le Principe d'Indifférence Matérielle ;
  - les symétries matérielles de la microstructure du matériau. On note S le groupe des matrices représentant les symétries matérielles du milieu ;
  - le Second Principe de la Thermodynamique.

Enfin, la troisième étape, celle dite d'identification est, comme la première, de nature expérimentale et réalisée sur des échantillons du VER. Les matériaux utilisés sont, suivant les applications auxquelles ils sont destinés, de nature et de constitution très différentes ainsi que les phénomènes internes qui peuvent y naître. Ici, on se propose d'admettre que la première étape du processus de construction des lois de comportement a été menée jusqu'à son terme et que les grandeurs mathématiques modélisant les phénomènes sont choisies. Quant à la troisième étape, essentiellement expérimentale, elle n'est pas l'objet de notre discussion : elle ne sera donc pas évoquée. C'est la seconde étape qui est l'objet de notre étude. Pour cela, on propose de se placer dans le cadre de la Thermodynamique des Milieux Continus et de la Méthode de l'Etat Local. On admet donc tout le vocabulaire qui y est associé. Ainsi, les lois d'état et les lois complémentaires, que l'on appellera ici plus généralement fonctionnelles de comportement sont issues des dérivées partielles de fonctions scalaires (fonctions d'état, les potentiels de dissipation...). Afin de permettre la vérification aisée des différents critères énoncés, ces fonctions scalaires peuvent être construites suivant certaines règles bien définies. Le but de l'étude est de proposer une méthode de construction de certaines formes de ces fonctions à la lumière de résultats récents de la Théorie des Invariants et du développement du calcul formel.

2 Notations, définitions et résultats utiles

Les repères d'espace associés aux référentiels de travail considérés sont supposés orthonormés : les caractères covariant et contravariant des tenseurs n'ont donc pas besoin d'être précisés. Les variables d'état qui modélisent les phénomènes physiques à prendre en compte forment un ensemble noté V. On les prend objectives et indépendantes. Les variables de type structurales forment un ensemble noté Σ. Si la précision de l'ordre tensoriel des variables est nécessaire, on limite l'exposé aux variables d'ordre 0, 1 ou 2. Elles appartiennent alors respectivement aux ensembles notés :

– V_0, V_1 et V_2. Ainsi : $V = V_0 \bigcup V_1 \bigcup V_2$;
– Σ_0, Σ_1 et Σ_2. Ainsi : $\Sigma = \Sigma_0 \bigcup \Sigma_1 \bigcup \Sigma_2$.

Lorsqu'aucune ambiguité n'est possible, pour des raisons de simplicité, on confond symboliquement le nom des variables d'un ensemble avec le nom de l'ensemble. Ainsi, par exemple, V_0 désigne non seulement un ensemble de variables 0-tensorielles, mais également, une variable 0-tensorielle. On note $q(t)$ une transformation orthogonale et $Q(t)$ sa matrice, élément du groupe orthogonal $O(3)$, dans une base donnée. Si V désigne une quantité, on note V' son image par $q(t)$. Enfin, on désigne par le symbole " * " le produit d'une matrice par un vecteur et par le symbole " : " le produit de deux matrices. Les trois propositions suivantes sont à la base de la méthode que nous proposons.

Proposition 1 - Soit une fonction f dont les variables sont supposées objectives, à valeurs réelles et différentiable. Alors, les dérivées partielles de f par rapport à ses variables sont objectives.

Proposition 2 - Soit $f = f(V, \Sigma)$ une fonction à valeurs réelles supposée différentiable et invariante sous le groupe S. Alors les dérivées partielles de f par rapport aux variables de V sont invariantes sous S.

Proposition 3 - Soit $f = f(V, \Sigma)$ une fonction à valeurs réelles supposée vérifier le Principe d'Indifférence Matérielle et invariante sous le groupe S, alors :

$$Q^0 \in S \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} Q^0 \in O(3), \\ \text{pour toute fonction } f = f(V, \Sigma) \\ \text{objective et continue par rapport à ses variables,} \\ \text{pour toutes valeurs des variables de } f, \\ f(V', \Sigma) = f(V, \Sigma) \end{array} \right\}$$

3 Enoncé précis de la problématique

Par application du Principe de Déterminisme ainsi que de l'Hypothèse de Localisation Spatiale, on estime ici que la forme locale générale des relations fonctionnelles de comportement (lois d'état, lois complémentaires) est la suivante : $a = \Phi(V, \Sigma)$. L'ordre tensoriel de la grandeur physique a n'est pas d'emblée nécessaire : on ne le précise donc pas. Cette relation fonctionnelle doit :

– vérifier le Principe d'Indifférence Matérielle, c'est-à-dire être objective ;
– être invariante sous le groupe des symétries matérielles du milieu ;
– conduire à un processus thermodynamiquement admissible.

Les propositions 1 et 2 permettent d'affirmer que, les variables V étant objectives, si on construit une fonction $f = f(V, \Sigma)$ polynômiale invariante sous S et objective, alors les dérivées partielles de f possèdent également ces propriétés. Le problème de l'obtention d'un processus thermodynamiquement se résume souvent au fait que f soit concave ou convexe par rapport à ses variables : on construira donc f de cette manière. Pour rappeler le vocabulaire du cadre thermodynamique dans lequel nous nous sommes délibérément placés, la fonction f joue en fait le rôle soit d'une fonction d'état soit d'un pseudo-potentiel de dissipation, soit d'un convexe auquel on adjoint une fonction indicatrice. Il convient maintenant de constater que peu de précision ont été données sur les tenseurs structuraux (Σ). Sans être justifié, c'est en tout cas compréhensible. En effet, s'il est aisé de décider ce que doivent être les variables d'état, il est moins simple de décider ce que peuvent être a priori les tenseurs structuraux. Compte-tenu de cette remarque, il faut faire en sorte de mettre au point une méthode de construction qui, sans toutefois les occulter, ne nécessite pas a priori de les connaitre (mais qui saura les mettre en évidence a posteriori). C'est la Proposition 3 qui le permet.

Finalement, si on se restreint au cas où les fonctions Φ que l'on cherche à construire sont polynômiales (choix particulier, mais qui est le plus couramment utilisé), la problèmatique peut se résumer de la manière suivante :
- à partir de la donnée :
  - d'un ensemble V de variables (objectives) : les variables usuellement appelées les variables d'état, qui modélisent les phénomènes physiques que l'on souhaite prendre en compte ;
  - des éléments du groupe S (ici, supposé sous-groupe fini de $O(3)$ et invariable au cours du temps, dont on note $|S|$ le nombre d'éléments) ;
- Etape 1 - Trouver l'ensemble des fonctions polynômiales scalaires des composantes des variables de V qui sont invariantes sous l'action de S (ou tout au moins une famille finie génératrice de ces fonctions et identifier les relations éventuelles entre ces éléments) ;
- Etape 2 - Construire un polynôme $P(V)$ invariant sous S, le plus général avec, si nécessaire, une condition sur son degré (et si nécessaire, sur sa convexité afin d'assurer le caractère thermodynamiquement admissible de la loi de comportement) : il est ainsi un polynôme des éléments de la famille génératrice introduite ci-dessus ;
- Etape 3 - Ecrire l'objectivité de $P(V)$ afin de respecter le Principe d'Indifférence Matérielle. On verra que cela revient à écrire $P(V)$ sous la forme $f = f(V, \Sigma)$, c'est-à-dire d'identifier les tenseurs structuraux ;
- Etape 4 - Par une opération de dérivée partielle sur $f = f(V, \Sigma))$, on obtient alors la fonctionnelle cherchée.

C'est donc avec l'aide de la Théorie des Invariants que l'on va résoudre les étapes 1 et 2 de manière structurée et très générale, quel que soit l'ordre tensoriel des variables de V. Toutefois, ici on se limite aux cas où les variables de V sont 0, 1 et 2-tensorielles, l'extension à des cas d'ordres supérieurs étant facilement réalisable avec le présent exposé.

4 Démarche de l'étude

Dans le cadre de la Mécanique des Milieux Continus, l'évocation et la nécessité de la prise en compte de la structure cristallographique des matériaux amène naturellement l'utilisation grandissante de la Théorie des Invariants à partir du milieu des années 1950 : Rivlin et Ericksen [5], Adkins [1], Smith et Rivlin [6], Wineman et Pipkin [12], Spencer [7] et Boehler [2]. Des applications sont faites par Talreja [8] et Thionnet [9] sur les matériaux composites et plus particulièrement sur le phénomène d'endommagement par fissuration. Dans tous les cas, les variables utilisées se limitent à quelques vecteurs et/ou quelques 2-tenseurs symétriques et/ou quelques 2-tenseurs antisymétriques et les exposés ne montrent pas de méthodes constructives systématiques. Bien qu'ici on ne développe explicitement la méthode que dans les cas d'un nombre quelconque de vecteurs et de 2-tenseurs, elle est transposable facilement à des cas où les variables tensorielles sont d'un ordre supérieur. Mais surtout, elle offre une systèmatique claire. Egalement, les études précédentes restent assez floues quant aux problèmes associés à l'unicité d'une écriture polynômiale donnée. Ici, on se propose d'amener une réponse à ce problème à l'aide du concept de base de Groebner de l'idéal des relations.

Finalement, on peut résumer la démarche adoptée de la manière suivante :
- l'ensemble V des variables et le groupe (fini) S des symétries matérielles étant supposés connus, on donne une borne au nombre des éléments d'une famille des générateurs possibles des invariants polynômiaux ;
- on donne la méthode pour construire ces éléments ;
- on écrit sous une forme induisant une certaine unicité, la décomposition de tout invariant polynômial de V sous S.

Enfin, à l'aide des critères de tensorialité, on a accès ainsi à l'écriture générale d'une forme polynômiale pour les fonctions d'état et les potentiels (ou pseudo-potentiels) de dissipation, dont on déduit lois d'état et lois complémentaires.

5 Mise en oeuvre de la méthode

La plupart des résultats mathématiques exposés et utilisés ici sont issus de l'ouvrage de D. Cox, J. Little et D. O'Shea [3] (on peut également voir celui de Derksen et Kemper [4]). On pourra trouver également l'intégralité des détails et des justifications de la méthode proposée dans les travaux de Thionnet et al. ([11], [10]).

5.1 Cadre mathématique

On suppose ici que les variables modélisant les phénomènes au sein du milieu dont on doit construire la loi de comportement, sont :

- m vecteurs de $I\!R^3$ notés $v_i (1 \leq i \leq m)$. Leurs composantes sont notées $x_{i,j} (1 \leq j \leq 3)$ dans la base canonique. La colonne de leurs coordonnées est notée v_i ;
- p matrices carrées réelles 3 x 3, c'est-à-dire p matrices de $M_3(I\!R)$ notées $A_j (1 \leq j \leq p)$. Leurs composantes sont notées $a_{j,kh} (1 \leq k, h \leq 3)$ dans la base canonique. La colonne de leurs coordonnées est notée X_{A_j}.

Ainsi :

$$v_i = \begin{pmatrix} x_{i,1} \\ x_{i,2} \\ x_{i,3} \end{pmatrix} X_{A_j} = \begin{pmatrix} a_{j,11} \\ a_{j,12} \\ a_{j,13} \\ a_{j,21} \\ a_{j,22} \\ a_{j,23} \\ a_{j,31} \\ a_{j,32} \\ a_{j,33} \end{pmatrix} si A_j = \begin{pmatrix} a_{j,11} & a_{j,12} & a_{j,13} \\ a_{j,21} & a_{j,22} & a_{j,23} \\ a_{j,31} & a_{j,32} & a_{j,33} \end{pmatrix}$$

Evidemment, la démarche peut être étendue à des variables d'autres ordres tensoriels puisqu'un tenseur d'ordre quelconque fixé est toujours un élément d'un espace de dimension finie sur $I\!R^3$. Puisqu'ici on se restreint au cas où les variables d'état modélisant les phénomènes à prendre en compte sont m vecteurs et p matrices, on se place dans l'espace vectoriel sur $I\!R^3$ noté W, défini de la manière suivante :

$$W = \left(I\!R^3\right)^{\oplus m} \oplus \left(M_3(I\!R)\right)^{\oplus p}$$

où tout vecteur w s'écrit $w = v_1 + \ldots + v_m + A_1 + \ldots + A_p$. On munit chacune des m copies de $I\!R^3$ et chacune des p copies de $M_3(I\!R)$ de leur base respective. La réunion de toutes ces bases est une base de W. L'ordre des éléments est fixé de telle sorte que le vecteur w ait pour colonne de coordonnées dans cette base :

$$X_W = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \\ X_{A_1} \\ \vdots \\ X_{A_p} \end{pmatrix} = X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ x_{n=3m+9p} \end{pmatrix}$$

5.2 Recherche des fonctions polynômiales invariantes sous le groupe de symétries

Le but est de construire une fonction f polynômiale sur W, de telle sorte qu'elle soit invariante sous l'action de S sur W, S étant le groupe des symétries matérielles du milieu (ici, sous-groupe fini de $O(3)$ et invariable au cours du temps). En d'autres termes, on cherche à construire f, polynômiale, telle que :

$$\forall g \in S$$

$$f(g * v_1 + \ldots + g * v_m + g : A_1 : g^T + \ldots + g : A_p : g^T) = f(v_1 + \ldots + v_m + A_1 + \ldots + A_p)$$

Plus globalement, en introduisant l'isomorphisme de W, noté $\rho_W(g)$ et appelé représentation de S dans W, dont l'action sur W est donnée par :

$$\rho_W(g)(w) = g * v_1 + \ldots + g * v_m + g : A_1 : g^T + \ldots + g : A_p : g^T$$

le problème posé est finalement la recherche de tous les polynômes f de n = 3m + 9p variables, vérifiant : $\forall g \in S, f\left(\rho_W(g)(w)\right) = f(w)$. On note :

$$G = \{\rho_W(g), g \in S\} = \rho_W(S), |G| = \text{le nombre d'éléments de } G.$$

On peut alors montrer que :
- $\rho_W(g)$, dans la base choisie de W, est représenté par une matrice carrée réelle inversible d'ordre 3m + 9p ;
- G est un sous-groupe fini de $GL_{3m+9p}(\mathbb{R})$;
- $|G| \leq |S|$.

5.3 Génération finie de l'anneau des invariants polynômiaux à n variables sous un groupe fini de matrices

On note $\mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ l'anneau des polynômes à n variables. On note $\mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]^G$ l'ensemble des polynômes de $\mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ invariants sous G. On montre qu'il est un sous-anneau de $\mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$. En ce qui concerne sa génération, la question fondamentale est la suivante : existe-t-il un ensemble fini de ses éléments $f_1, \ldots, f_k$, appelé système de générateurs ou famille génératrice, tel que tout autre élément f s'écrive comme un polynôme réel de $f_1, \ldots, f_k$, soit :

$$f(x_1, ..., x_n) = h(f_1, ..., f_k) \text{ où } h \in \mathbb{R}[y_1, ..., y_k]$$

Le Théorème d'E. Noether répond à la question et permet la construction explicite de cette famille génératrice.

Théorème d'E. Noether - Soit la famille finie d'éléments de $\mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]^G$ définie par :

$$F = \{R_G(X^\alpha), \forall \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n avec\, |\alpha| \leq |G|\}$$

où R_G est l'opérateur de Reynolds de G. Alors, tout polynôme P de $\mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ invariant sous G s'écrit comme une expression polynômiale des éléments de F.

Il peut exister des relations entre les éléments de F : l'écriture d'un élément de $\mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]^G$ n'est donc pas unique.

5.4 Décomposition d'un invariant polynômial

Supposons construit un système fini $F = (f_1, \ldots, f_k)$ de générateurs de $\mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]^G$. Maintenant, nous voulons répondre à la question suivante : pour une famille F donnée, pouvons nous donner toutes les décompositions d'un invariant f par rapport à F ? La réponse est positive. Pour obtenir cette écriture, il convient d'admettre :
- que la réponse à cette question revient à trouver toutes les relations algébriques entre les éléments de F ;
- que la structure de l'ensemble de ces relations est un idéal, noté I_F ;
- que la mise en évidence d'une base particulière de cet ensemble, appelée base de Groebner permet de statuer quant à l'unicité de l'écriture d'un invariant polynômial.

Le Théorème d'Hilbert affirme qu'il existe un système fini de générateurs de l'ensemble I_F. Supposons connu un tel système, noté $(g_1, \ldots, g_s)$. Nous sommes donc dans la situation suivante : on s'est fixé un système de générateurs $F = (f_1, \ldots, f_k)$ de l'anneau des invariants $\mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]^G$. Alors tout invariant f s'écrit :

$$f(x_1, ..., x_n) = g\left(f_1(x_1, ..., x_n), ..., f_k(x_1, \ldots, x_n)\right) \text{ où } g \in \mathbb{R}[y_1, \ldots, y_k]$$

Mais g n'est pas unique. On peut ensuite montrer que toute décomposition de l'invariant f par rapport à $F = (f_1, \ldots, f_k)$ est de la forme :

$$f = g(f_1, \ldots, f_k) + a_1(f_1, \ldots, f_k)g_1(f_1, \ldots, f_k) + \ldots + a_s(f_1, \ldots, f_k)g_s(f_1, \ldots, f_k)$$

où les polynômes $a1, ..., as$ et g sont des polynômes quelconques de k variables.

La formule ci-dessus définie en fait la division du polynôme f par la famille de polynômes $(g_1, \ldots, g_s)$ où g est finalement le reste de cette division. La question qui se pose maintenant est la suivante : étant donné un polynôme f de k variables, et une famille finie $(g_1, \ldots, g_s)$ de polynômes de k variables, le reste de la division de f par g est-il unique ? La réponse à cette question est négative sauf si on impose à $(g_1, \ldots, g_s)$ d'être plus qu'un système de générateurs de l'idéal qu'ils engendrent : être une base de Groebner.

5.5 Construction de polynômes objectifs

Si l'on se souvient que la problématique était, à partir de la donnée d'un ensemble V de variables tensorielles et du groupe (fini) S des symétries matérielles, de construire des fonctions polynômiales objectives des éléments de V, invariantes sous S, alors le but est presque atteint. En effet, les polynômes construits ici, l'ont été de telle sorte qu'ils soient invariants sous le groupe S. Toutefois, rien n'assure qu'ils soient objectifs. Pour obtenir cette qualité, une solution est la suivante : voir les composantes du polynôme f (c'est-à-dire ses coefficients) comme étant celles issues d'un (ou plusieurs) tenseur X_f (donc de fait invariant sous S et obéissant aux critères de tensorialité) et d'une (ou plusieurs) opération tensorielle. Le caractère tensoriel de Xf et des variables de V conduit à ce que la fonction Φ définie par $\Phi(V, X_f) = f(V)$ soit objective : son résultat est, en effet, invariant sous $O(3)$, par construction. Le tenseur X_f est considéré comme un tenseur structural.

6 Application

On souhaite construire la fonction d'état énergie libre Ψ dans le cas où l'on suppose au sein du domaine étudié :

- l'Hypothèse des Petites Perturbations ;
- la température constante et uniforme ;
- l'existence d'un phénomène interne modélisé par un vecteur $\vec{V}$;
- que le groupe des symétries matérielles est le groupe $S_2 = \{I, R_1\}$ avec :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} R_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dans ce cas, les variables d'état se résument au tenseur (symétrique) des déformations ε et à l'unique vecteur $\vec{V}$ qui modélise le phénomène interne. Supposons (pour des raisons liées à des considérations physiques) que notre souhait est d'écrire la fonction énergie libre comme un polynôme invariant sous S_2 de degré partiel 0 ou 2 par rapport aux composantes de ε et $\vec{V}$. On donne à la suite, et de manière séquentielle, les étapes qui vont permettre d'aboutir à l'écriture désirée. L'espace W est ici : $W = \mathbb{R}^3 \oplus M_{3sym}(\mathbb{R})$. Le problème à résoudre consiste à construire f telle que :

$$\forall g \in S_2, f\left(\rho_W(g)(w)\right) = f(w) \text{ où } \rho_W(g)(w) = g * V + g : \varepsilon : g^T$$

Le sous-groupe G_2 est $G_2 = \{\rho_W(g), g \in S_2\} = \{\rho_W(I), \rho_W(R_1)\} = \rho_W(S_2)$ et on a $|G| = 2$ avec :

$$\rho_W(I) = diagonal(1,1,1,1,1,1,1,1,1)$$
$$\rho_W(R_1) = diagonal(-1,1,1,1,-1,-1,1,1,1)$$

L'application stricte du Théorème de Noether donne une première famille de générateurs :

$$F'_2 = \left\{ \begin{array}{l} V_2, V_3, \varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{23}, \varepsilon_{33}, V_1^2, V_1\varepsilon_{12}, V_1\varepsilon_{13}, \\ V_2\varepsilon_{11}, V_3\varepsilon_{11}, V_2\varepsilon_{22}, V_2\varepsilon_{23}, V_2\varepsilon_{33}, V_3\varepsilon_{22}, V_3\varepsilon_{23}, V_3\varepsilon_{33}, \\ \varepsilon_{11}^2, \varepsilon_{11}\varepsilon_{22}, \varepsilon_{11}\varepsilon_{23}, \varepsilon_{11}\varepsilon_{33}, \varepsilon_{12}^2, \varepsilon_{12}\varepsilon_{13}, \varepsilon_{13}^2, \varepsilon_{22}^2, \varepsilon_{22}\varepsilon_{23}, \varepsilon_{22}\varepsilon_{33}, \varepsilon_{23}\varepsilon_{33}, \varepsilon_{33}^2 \end{array} \right\}$$

On en déduit une base d'intégrité :

$$F_2 = \{V_2, V_3, \varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{23}, \varepsilon_{33}, V_1^2, V_1\varepsilon_{12}, V_1\varepsilon_{13}, \varepsilon_{12}^2, \varepsilon_{12}\varepsilon_{13}, \varepsilon_{13}^2\}.$$

On pose :

$$f_1(\vec{V},\varepsilon) = I_1(\vec{V},\varepsilon) = V_1^2 f_2(\vec{V},\varepsilon) = I_2(\vec{V},\varepsilon) = V_1\varepsilon_{12} f_3(\vec{V},\varepsilon) = I_3(\vec{V},\varepsilon) = V_1\varepsilon_{13}$$

$$f_4(\vec{V},\varepsilon) = I_4(\vec{V},\varepsilon) = V_2 f_5(\vec{V},\varepsilon) = I_5(\vec{V},\varepsilon) = V_3 f_6(\vec{V},\varepsilon) = I_6(\vec{V},\varepsilon) = \varepsilon_{11}$$

$$f_7(\vec{V},\varepsilon) = I_7(\vec{V},\varepsilon) = \varepsilon_{12}^2 f_8(\vec{V},\varepsilon) = I_8(\vec{V},\varepsilon) = \varepsilon_{12}\varepsilon_{13} f_9(\vec{V},\varepsilon) = I_9(\vec{V},\varepsilon) = \varepsilon_{13}^2$$

$$f_{10}(\vec{V},\varepsilon) = I_{10}(\vec{V},\varepsilon) = \varepsilon_{22} f_{11}(\vec{V},\varepsilon) = I_{11}(\vec{V},\varepsilon) = \varepsilon_{23} f_{12}(\vec{V},\varepsilon) = I_{12}(\vec{V},\varepsilon) = \varepsilon_{33}$$

La recherche d'une base de Groebner de l'idéal des relations donnent dans un premier temps, la liste des relations qui existent entre les éléments de F_2 :

$$I_9(\vec{V},\varepsilon)I_7(\vec{V},\varepsilon) - I_8^2(\vec{V},\varepsilon) = 0$$
$$I_9(\vec{V},\varepsilon)I_2(\vec{V},\varepsilon) - I_8(\vec{V},\varepsilon)I_3(\vec{V},\varepsilon) = 0$$
$$I_2(\vec{V},\varepsilon)I_8(\vec{V},\varepsilon) - I_7(\vec{V},\varepsilon)I_3(\vec{V},\varepsilon) = 0$$
$$I_9(\vec{V},\varepsilon)I_1(\vec{V},\varepsilon) - I_3^2(\vec{V},\varepsilon) = 0$$
$$I_1(\vec{V},\varepsilon)I_8(\vec{V},\varepsilon) - I_2(\vec{V},\varepsilon)I_3(\vec{V},\varepsilon) = 0$$
$$I_1(\vec{V},\varepsilon)I_7(\vec{V},\varepsilon) - I_2^2(\vec{V},\varepsilon) = 0$$

Le polynôme recherché peut s'écrire sous la forme $\psi(\varepsilon,\vec{V}) = \varphi_{20}(\varepsilon) + \varphi_{02}(\vec{V}) + \varphi_{22}(\varepsilon,\vec{V})$ avec :

$$\begin{aligned}\varphi_{20}(\varepsilon) = {} & A_1\varepsilon_{11}^2 + A_2\varepsilon_{11}\varepsilon_{22} + A_3\varepsilon_{11}\varepsilon_{23} + A_4\varepsilon_{11}\varepsilon_{33} + A_5\varepsilon_{22}^2 + A_6\varepsilon_{22}\varepsilon_{23} + A_7\varepsilon_{22}\varepsilon_{33} \\ & + A_8\varepsilon_{23}^2 + A_9\varepsilon_{23}\varepsilon_{33} + A_{10}\varepsilon_{33}^2 + A_{11}\varepsilon_{12}^2 + A_{12}\varepsilon_{13}^2 + A_{13}\varepsilon_{12}\varepsilon_{13}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi_{22}(\varepsilon,\vec{V}) = {} & (B_1\varepsilon_{11}^2 + B_2\varepsilon_{11}\varepsilon_{22} + B_3\varepsilon_{11}\varepsilon_{23} + B_4\varepsilon_{11}\varepsilon_{33} + B_5\varepsilon_{22}^2 + B_6\varepsilon_{22}\varepsilon_{23} + B_7\varepsilon_{22}\varepsilon_{33} \\ & + B_8\varepsilon_{23}^2 + B_9\varepsilon_{23}\varepsilon_{33} + B_{10}\varepsilon_{33}^2 + B_{11}\varepsilon_{12}^2 + B_{12}\varepsilon_{13}^2 + B_{13}\varepsilon_{12}\varepsilon_{13})V_1^2 \\ & + (C_1\varepsilon_{11}^2 + C_2\varepsilon_{11}\varepsilon_{22} + C_3\varepsilon_{11}\varepsilon_{23} + C_4\varepsilon_{11}\varepsilon_{33} + C_5\varepsilon_{22}^2 + C_6\varepsilon_{22}\varepsilon_{23} + C_7\varepsilon_{22}\varepsilon_{33} + C_8\varepsilon_{23}^2 + C_9\varepsilon_{23}\varepsilon_{33} \\ & + C_{10}\varepsilon_{33}^2 + C_{11}\varepsilon_{12}^2 + C_{12}\varepsilon_{13}^2 + C_{13}\varepsilon_{12}\varepsilon_{13})V_2^2 \\ & + (D_1\varepsilon_{11}^2 + D_2\varepsilon_{11}\varepsilon_{22} + D_3\varepsilon_{11}\varepsilon_{23} + D_4\varepsilon_{11}\varepsilon_{33} + D_5\varepsilon_{22}^2 + D_6\varepsilon_{22}\varepsilon_{23} + D_7\varepsilon_{22}\varepsilon_{33} \\ & + D_8\varepsilon_{23}^2 + D_9\varepsilon_{23}\varepsilon_{33} + D_{10}\varepsilon_{33}^2 + D_{11}\varepsilon_{12}^2 + D_{12}\varepsilon_{13}^2 + D_{13}\varepsilon_{12}\varepsilon_{13})V_3^2 \\ & + (E_1\varepsilon_{11}^2 + E_2\varepsilon_{11}\varepsilon_{22} + E_3\varepsilon_{11}\varepsilon_{23} + E_4\varepsilon_{11}\varepsilon_{33} + E_5\varepsilon_{22}^2 \\ & + E_6\varepsilon_{22}\varepsilon_{23} + E_7\varepsilon_{22}\varepsilon_{33} + E_8\varepsilon_{23}^2 + E_9\varepsilon_{23}\varepsilon_{33} + E_{10}\varepsilon_{33}^2 + E_{11}\varepsilon_{12}^2 + E_{12}\varepsilon_{13}^2 + E_{13}\varepsilon_{12}\varepsilon_{13})V_2V_3\end{aligned}$$

$$\varphi_{02}\left(\vec{V}\right) = F_1 V_1^2 + F_2 V_2^2 + F_3 V_2 V_3 + F_4 V_3^2$$

Ce polynôme a été construit de telle sorte qu'il soit invariant sous le groupe S_2 des symétries matérielles du milieu. Toutefois, rien n'assure pour l'instant que soit objectif. C'est ce qu'il convient de regarder maintenant. Pour cela, puisque les tenseurs $\vec{V}$ et ε vérifient de fait les critères de tensorialité, remarquons que les quantités :

$$\omega^{(2)}(\vec{V}, X) = X_{ij} V_j V_i, \omega^{(4)}(\varepsilon, Y) = Y_{ijkh} \varepsilon_{kh} \varepsilon_{ij}, \omega^{(6)}(\varepsilon, \vec{V}, Z) = Z_{ijkhpq} \varepsilon_{kh} \varepsilon_{ij} V_p V_q$$

où X, Y, Z sont respectivement des tenseurs d'ordre 2, 4 et 6 (donc qui obéissent aux critères de tensorialité), sont invariantes par changement de base, donc objectives. Sur cette remarque, et sur l'examen de la forme du polynôme $\psi(\varepsilon, \vec{V})$ on constate que l'on peut poser :

$$\varphi_{02}(\vec{V}) = \omega^{(2)}(\vec{V}, X), \varphi_{20}(\varepsilon) = \omega^{(4)}(\varepsilon, Y), \varphi_{22}(\varepsilon, \vec{V}) = \omega^{(6)}(\varepsilon, \vec{V}, Z)$$

où les composantes des tenseurs X, Y, Z sont obtenues par identification des deux membres des expressions précédentes. Les tenseurs X, Y et Z peuvent ainsi être considérés comme des tenseurs structuraux puisque, par construction même, ils se conservent sous S. Finalement :

$$\psi(\varepsilon, \vec{V}) = \omega^{(4)}\left(\varepsilon, Y\right) + \omega^{(2)}\left(\vec{V}, X\right) + \omega^{(6)}\left(\varepsilon, \vec{V}, Z\right)$$

7 Conclusion

Basé sur la Théorie des Invariants, et à l'aide d'outils de calculs formels, on a proposé une méthode générale et constructive en vue de l'écriture de fonctions d'état, de potentiel de dissipation ou de critère... sous forme polynômiale et respectant l'ensemble des contraintes imposées par la Thermodynamique des Milieux et les Grands Principes de la Physique, à la construction de lois de comportement cohérentes. On a donc construit une fonction polynômiale par rapport aux composantes des variables ε, $\vec{V}$, X, Y et Z qui est invariante sous le groupe des symétries matérielles du milieu et pour lequel l'objectivité est acquise. Le caractère convexe de ce polynôme est obtenu si les différentes matrices et tenseurs sont symétriques définis positifs.

Références

[1] J.E. Adkins. Symmetry relations for orthotropic and transversely isotropic materials. *Arch. Rat. Mech. An.*, 4 :193–213, 1960.

[2] J.P. Boehler. Applications of tensor functions in solid mechanics. *Springer - Verlag*, 1987.

[3] D. Cox, J. Little, and D. OShea. Ideals, varieties and algorithms : an introduction to computational algebraic geometry and commutative algebra. *Springer - Verlag*, 1992.

[4] H. Derksen and G. Kemper. Computational invariant theory, encyclopedia of mathematical sciences. *Springer - Verlag*, 2002.

[5] R.S. Rivlin and J.L. Ericksen. Stress - deformation relation for isotropic materials. *J. Rat. Mech. An.*, 4 :323–425, 1955.

[6] G.F. Smith and R.S. Rivlin. The anisotropic tensors. *Q. Appl. Math.*, 15 :309–314, 1957.

[7] A.J.M. Spencer. Theory of invariants. *Continuum Physics, ed. by C. Eringen, Academic Press*, pages 239–353, 1971.

[8] R. Talreja. Fatigue of composite materials. *Technical University of Denmark*, 1985.

[9] A. Thionnet. A model for the recovering of thermomechanical properties in strongly anisotropic damaged materials. *Journal of Composites Materials*, 35 :731–750, 2001.

[10] A. Thionnet and C. Martin. A new constructive method using the theory of invariants to obtain material behavior laws. *International Journal of Solids and Structures*, 43/2 :325–345, 2006.

[11] A. Thionnet, C. Martin, and S. Barradas. Mécanique et comportements des milieux continus, tome 2 : applications et théorie des invariants. *Editions Ellipses, ISBN 2-7298-1807-3*, 2003.

[12] A.S. Wineman and A.C. Pipkin. Material symmetry restrictions on constitutive equations. *Arch. Rat. Mech. An.*, 17 :184–214, 1964.